02.2019 Grupa simetrija (Simetrična grupa) I predavanje

Def. Permutacije su bijektivna preslikavanja nepraznog skupa G na samog sebe. Skup svih permutacija na skupu G označavamo sa S_G. $(S_G, \circ)$, kompozicija tj. proizvod preslikavanja, je grupa koja se naziva simetrična grupa skupa G.

Specijalno, ako je $|G|=n$, onda se koristi oznaka S_n i $(S_n, \circ)$ se naziva simetrična grupa stepena n. Primijetimo da ako je $n \geq 3$, onda grupa S_n nije komutativna (sami!).

Teorema Keli, o reprezentaciji grupa. Svaka grupa G je izomorfna nekoj podgrupi simetrične grupe S_G.

Dokaz. Definišemo preslikavanje $\phi : G \to S_G$ na sledeći način: $(\forall a \in G)\ \phi(a) = \sigma_a$, gdje je $\sigma_a \in S_G$ je lijeva translacija definisana sa $(\forall x \in G)\ \sigma_a(x) = ax$. Jasno, $a = b \iff \sigma_a = \sigma_b$.

"$\Longrightarrow$" $\to$ dobra definisanost "$\Longleftarrow$" $\to$ injektivnost.

Preslikavanje je homomorfizam. $\forall a, b \in G : \phi(a \cdot b) = \sigma_{ab} \overset{(*)}{=} \sigma_a \circ \sigma_b = \phi(a) \circ \phi(b)$.

(*) $(\forall x \in G) : \sigma_{ab}(x) = (a \cdot b)x = a(bx) = \sigma_a(\sigma_b(x)) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(x) \Rightarrow \sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b$.

Dakle, $\phi : G \to S_G$ je monomorfizam grupa, tj. $\phi : G \to \phi(G) \leq S_G$ izomorfizam ■

Svaka permutacija σ može da se zapiše u obliku $\sigma = (a_1, a_2, \ldots$ uređene n-torke, to znači:

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

tj. $\sigma(i) = a_i\ ,\ \forall i = \overline{1,n}$.

Ciklus dužine k je permutacija sastavljena od k različitih a_i-ova. $(a_1a_2\cdots a_k)$, to znači:

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & a_k \arrow[llll, bend left] \end{tikzcd}$$

$\forall x \neq a_1, a_2, \dots, a_k: \quad \sigma(x) = x.$

Jasno, $\sigma^k = id$, $\sigma^k = \underbrace{\sigma\circ\sigma\circ\dots\circ\sigma}_{k}$ tj. ciklus dužine **k je reda k**.

Skup $P=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ je **nosač ciklusa dužine k**.
Ciklus dužine 2 se naziva **transpozicija**. Obilježavamo sa $\tau=(ab): a\mapsto b$. $\forall x\neq a,b: \tau(x)=x$. Svaki ciklus dužine k može zapisati u obliku $\sigma=(a_1a_2\cdots a_k)=(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{k-1}a_k)$ k−1 transpozicija.

$(-1)^{k-1}$ se naziva **znak ciklusa dužine k**. U zavisnosti od parnosti broja k−1, ciklus dužine k je paran (neparan).

Svaka transpozicija je neparna i znaka −1.

Za dva ciklusa σ i τ kažemo da su nezavisna ako su im nosači disjunktni tj. $P\cap Q=\emptyset$.

Za nezavisne cikluse važi da je $\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma$ tj. oni komutiraju. (Ciklusi $\sigma\circ\tau$ i $\tau\circ\sigma$ su isti na skupovima P, Q i $G\setminus(P\cup Q)$)

Teorema: Neka je $|G|=n$ a) Svaka permutacija $\sigma\in S_n$ definiše na skupu G relaciju ekvivalencije ρ:

$(\forall x,y\in G)\ x\rho y \Leftrightarrow (\exists i\in \mathbb{Z})\ \sigma^i(x)=y$

a) Klase ekvivalentnih elemenata su ciklusi određene dužine.

b) Svaka permutacija σ se može zapisati u obliku proizvoda nezavisnih ciklusa jednoznačno do na raspored.

Dokaz. a) Binarna relacija ρ je relacija ekvivalencije, jer je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

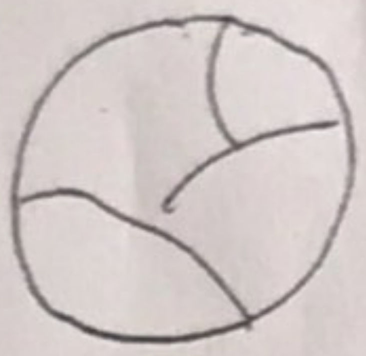
(R) $(\forall x\in G)\ x\rho x$, jer $\exists i=0\in\mathbb{Z}$ $\sigma^0(x)=x$

(S) $(\forall x,y\in G)\ x\rho y \Rightarrow y\rho x$

$\exists i\in\mathbb{Z}\ \sigma^i(x)=y \Rightarrow x=\sigma^{-i}(y)$. $(-i\in\mathbb{Z})$

(T) $(\forall x,y,z\in G)\ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$

$\Rightarrow (\exists i,j\in\mathbb{Z})\ (\sigma^i(x)=y,\ \sigma^j(y)=z)$. Onda, $\exists i+j\in\mathbb{Z}$ takav da je $z=\sigma^j(y)=\sigma^j(\sigma^i(x))=(\sigma^j\circ\sigma^i)(x)=\sigma^{j+i}(x)$, dakle relacija ρ je relacija ekvivalencije.



$G/\rho=\{C_x \mid x\in G\}$

$C_x=\{y\in G \mid x\rho y\}=\{y\in G \mid (\exists i\in\mathbb{Z})\ \sigma^i(x)=y\}$

x – reprezent klase; klasa ekvivalencije.

$C_x=\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{-1}(x), \sigma^{-2}(x), \dots\}$. Kako je G konačan, to $\exists i,j\in\mathbb{Z}$ t.d. $\sigma^i(x)=\sigma^j(x)$. Opštost se ne umanjuje da pretp. $i\geq j$. Onda, $\sigma^{i-j}(x)=x$. Označimo $i-j=k$, tj. $\sigma^k(x)=x$.

$C_x=\{x, \sigma^1(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{k-1}(x)\}$

$\sigma^{-1}(x)=\sigma^{-1}(\sigma^k(x))=\sigma^{k-1}(x)$.

Svakoj klasi ekvivalencije C_x pridružimo ciklus dužine k.

$C_x \longleftrightarrow (x\ \sigma^1(x)\dots\sigma^{k-1}(x))$

b) Svaka permutacija $\sigma=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\dots\circ\sigma_m$ u obliku proizvoda nezavisnih ciklusa. ■

Npr.

$$\sigma=\begin{pmatrix} a & b & c & p & q & r & x & y & z \\ c & b & y & a & x & r & z & p & q \end{pmatrix}$$

$\sigma_1=(a\ c\ y\ p)$ $\quad$ $\sigma_4=(r)$

$\sigma_2=(b)$

$\sigma_3=(q\ x\ z)$

Scanned by TapScanner

13.02.2019 II predavanje

Def. Ciklus dužine n se naziva ciklična permutacija. Proizvod svakova nezavisnih ciklusa jednak je svaku permutaciju.

Oznaka $\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1; & \sigma - \text{parna permutacija} \\ -1; & \sigma - \text{neparna permutacija} \end{cases}$

$$S_n \xrightarrow{\varphi} C_2, \quad C_2=\{-1,1\}$$

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$$(\forall \sigma\in S_n)\ \varphi(\sigma)=\operatorname{sgn}\sigma$$

Lako se provjerava da je φ homomorfizam grupa (još jače, epimorfizam).

$$A_n = \ker\varphi = \{\sigma\in S_n \mid \varphi(\sigma)=\operatorname{sgn}\sigma=1\} \trianglelefteq S_n$$

A_n alternativna grupa stepena n. → skup svih parnih permutacija.

$$\begin{tikzcd} S_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & C_2 \\ & S_n/\ker\varphi \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} \qquad h\circ\pi=\varphi$$

$$S_n/A_n \cong C_2$$

$|S_n/A_n| = 2$

$A_n,\ S_n\setminus A_n$

$f: A_n \to S_n\setminus A_n$ — bijekcija

$\sigma \longmapsto \sigma\circ\tau$ → transpozicija, ciklus dužine 2 (neparna permutacija)

σ — parna permutacija

$$|A_n|=|S_n\setminus A_n|$$
$$|S_n|=n!$$

Pr. S_3

$p_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1)$ $\quad p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\,2\,3)$

$p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(2\,3)$ $\quad p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\,3\,2)$

$p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\,2)$ $\quad p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1\,3)$

$S_3=\{p_0,p_1,\dots,p_5\}$

$|S_3|=6=3!$